Corps des complexes – Trigonométrie

M2 – Chapitre 2

I. Complexes

1. Formules

$\boxed{\overline{z} = a - ib}$ $\quad \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ $\quad \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$ $\quad \boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$ $\quad |zz'| = |z||z'|$

$\boxed{|z + z'|^2 = |z|^2 + 2Re\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2}$ $\quad \boxed{\big||z| - |z'|\big| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|}$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} z^k = 1 + z + \cdots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}} \quad (z \neq 1)$$

2. Groupes et ensembles remarquables

$\boxed{\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}}$ $\quad (\mathbb{U}, \times)$ est un groupe commutatif

$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$

$\overline{D}(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}$

II. Trigonométrie

1. Formules

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a = \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \quad \Big| \quad \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \quad \Big| \quad \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$
$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[-\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$
$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a + b) + \sin(a - b)]$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p + q}{2}\right)\cos\left(\frac{p - q}{2}\right)$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p + q}{2}\right)\sin\left(\frac{p - q}{2}\right)$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p + q}{2}\right)\cos\left(\frac{p - q}{2}\right)$$
$$\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p + q}{2}\right)\sin\left(\frac{p - q}{2}\right)$$

$$t = \tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} \quad \Big| \quad \sin\theta = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \Big| \quad \cos\theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \Big| \quad \tan\theta = \frac{2t}{1 - t^2}$$

2. Morphisme de groupe

Soient (G, T) et (G', T') deux groupe, ϕ une application de G dans G'.
ϕ est un morphisme de groupe $\Leftrightarrow \forall x, x') \in G,\ \ xTx' = \phi(x)T'\phi(x')$

Noyau de $\phi = \operatorname{Ker}\phi = \phi^{-1}(e') = \{x \in G \mid \phi(x) = e_{G'}\}$
Image de $\phi = \operatorname{Im}\phi \ = \phi(G) \quad = \{x' \in G' \mid \forall\, x \in G, \phi(x) = x'\}$

3. Formules de Moivre et d'Euler, Binôme de Newton

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} \qquad \boxed{\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}} \qquad \boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

III. Racines nièmes de l'unité

$$\boxed{\mathbb{U}_n = \{z^n = 1 \mid z \in \mathbb{C}\} = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in [\![0\,;n-1]\!]\right\}}$$

IV. Calculs trigonométriques courants

1. Développer cos(nθ) en puissances de cos(θ)

1. $\cos(n\theta) = \frac{(e^{i\theta})^n + (e^{-i\theta})^n}{2}$ et développer les $e^{i\theta}$
2. Utiliser le binôme de Newton
3. Regrouper

2. Linéariser $\cos^n(\theta)$

1. $\cos^n\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^n$
2. Utiliser le binôme de Newton
3. Regrouper les termes conjugués
4. Retransformer en cos

3. Calculer $S_n = 1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \dots + \cos(n\theta)$

1. $S_n = Re\left(1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta} + \dots + e^{in\theta}\right) = Re\left(\frac{e^{i(n+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1}\right)$
2. Factoriser par l'angle moitié pour simplifier